

ZR-384

B. Sc. (Fourth Semester) Examination,
April May 2017

MATHEMATICS

(Abstract Algebra, Advanced Calculus, Partial
Differential Equations and Complex Analysis)

Time Allowed: Three hours

Maximum Marks: 125

नोट : सभी तीनों खण्डों के पश्चात् निर्देशानुसार करें। अंकों का
विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note: Attempt questions of all three sections as
directed. Distribution of marks is given with
sections.

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×3=15

(Very Short Answer Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों
का है।

Note: Answer all the following questions. Each
question carries 3 marks.

1. (i) G एक अन-अबेली समूह है तथा $f: G \rightarrow G$ इस प्रकार
परिभाषित है कि $f(x) = x^{-1}$, $\forall x \in G$ दर्शाइये कि
 f स्वकारिता नहीं है।

Let G be a non-abelian group and $f: G \rightarrow G$, be
defined by $f(x) = x^{-1}$, $\forall x \in G$. Show that f is
not an automorphism.

(ii) R और R' बलय हैं तथा $f: R \rightarrow R'$ एक समाकारिता है
तो सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि R की गुणव्यवली है।

Prove that the Kernel of a homomorphism from R
to a ring R' is an ideal of R .

(iii) सिद्ध कीजिए कि—

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

Prove that :

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

(iv) समीकरण $pq=1$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

Find complete integral of the equation $pq=1$

(v) फलन $f(z) = \frac{z}{z-2}$ के स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Find fixed points of the function $f(z) = \frac{z}{z-2}$

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×8=40

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 8 marks.

इकाई-1

Unit-1

2. यदि G एक अबेली समूह है तो $C(a)$, अर्थात् a का संयुग्मी वर्ग, ज्ञात कीजिए, जहाँ $a \in G$

If G is an abelian group then find $C(a)$, the conjugate class of a , where $a \in G$.

अथवा

Or

काशी प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक आबेली समूह जिसकी कोटि 6 है चक्रीय होता है।

Using Cauchy theorem, prove that an abelian group of order 6 is cyclic.

इकाई-II

Unit-II

3. सिद्ध कीजिए कि किसी वलय के दो गुणजावलयों का सर्वनिष्ठ गुणजावली होता है।

Prove that intersection of two ideals of a ring is an ideal.

अथवा

Or

वलय समाकोरिता की परिभाषा लिखिए।

Define ring homomorphism.

इकाई-III

Unit-III

15. सिद्ध कीजिए कि—

$$\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$$

Prove that :

$$\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$$

अथवा

Or

समाकलन की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx$$

Test the convergence of the integral

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx$$

इकाई-IV

Unit-IV

15. हल करें—

$$(y+z)p + (z+x)q = x+y$$

Solve :

$$(y+z)p + (z+x)q = x+y$$

| 7 |

अथवा

Or

हल करें—

$$r + 2s + t = 0$$

Solve:

$$r + 2s + t = 0$$

इकाई-V

Unit-V

6. सिद्ध कीजिए कि किसी वैश्लेषिक फलन के वास्तविक और काल्पनिक भाग लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

Prove that real and imaginary parts of an analytic function satisfy Laplace equation.

अथवा

Or

✓ मोबियस रूपान्तरण और तिर्यक अनुपात को परिभाषित कीजिए।

Define Mobius transformation and cross ratio.

| 8 |

खण्ड-स

Section-C

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×14=70

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 14 marks.

इकाई-I

Unit-I

7. यदि $\phi(G) = p^2$, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि G एक अबेली समूह है।

If $\phi(G) = p^2$, where p is prime number, then prove that G is abelian group.

अथवा

Or

अन-अबेली परिमित समूह के लिए कोशी प्रमेय का कथन निर्धारण और सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's theorem for finite non-abelian groups.

इकाई-II

Unit-II

8. सिद्ध कीजिए कि $m + n\sqrt{2}$ के रूप की सभी वास्तविक संख्याओं \mathbb{R} का समुच्चय, जहाँ m, n परिमित हैं, साधारण योग और गुणा के संतुल्य क्लय होता है।

Prove that the set of all real numbers \mathbb{R} of the form $m + n\sqrt{2}$, where m, n are rational numbers, is a ring under the usual addition and multiplication.

अथवा

Or

यदि S क्लय R की गणजावली है तो सिद्ध कीजिए कि R/S क्लय R की समाकारी प्रतिबिम्ब है।

ZR-384

PTO

If S is an ideal of a ring R , then prove that R/S is a homomorphic image of R .

इकाई-III

Unit-III

9. $x^2 + y^2 + z^2$ का न्यूनतम मान बताइये, यदि $ax + by + cz = p$ है।

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ having that $ax + by + cz = p$.

अथवा

Or

दर्शाइए कि—

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (m, n > 0)$$

Show that :

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (m, n > 0)$$

ZR-384

[11]

इकाई-IV

Unit-IV

10) $q = px + p^2$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए।

Find complete integral of $q = px + p^2$

अथवा

Or

निम्न समीकरण को हल करें—

$$(D^2 + DD' + D' - 1)z = \sin(x + 2y)$$

Solve the following equation :

$$(D^2 + DD' + D' - 1)z = \sin(x + 2y)$$

इकाई-V

Unit-V

11) उस विश्लेषिक फलन के काल्पनिक भाग ज्ञात कीजिए जिसका

वास्तविक भाग $x^2 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$ है।

[12]

* Find the imaginary part of the analytic function whose real part is $x^2 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$

अथवा

Or

वह मोबियस रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 2, 1, 0$ को बिन्दुओं $w = 1, 0, i$ में रूपान्तरित करे।

Find the Mobius transformation which transforms the points $z = 2, 1, 0$ into $w = 1, 0, i$