

BR-838

B. Sc. (Third Year) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper : Second

(Real & Complex Analysis)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : इस खण्ड में वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं। सभी प्रश्न हल करें।

BR-838

PTO

Note: This section contains objective type questions.
Attempt all questions.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) यदि $f : [a, b] \rightarrow R$ एक परिवद्ध फलन है और $P, [a, b]$ का कोई विभाजन है, तथा P^*, P का एक अधिशोधन है, तब—

(a) $L(P^*, f) = L(P, f)$

(b) $U(P^*, f) = U(P, f)$

(c) $L(P^*, f) \geq L(P, f)$

(d) इनमें से कोई नहीं

If $f : [a, b] \rightarrow R$ is a bounded function, P is a partition of $[a, b]$ and P^* is a refinement of P , then :

(a) $L(P^*, f) = L(P, f)$

BR-838

(b) $U(P^*, f) = U(P, f)$

(c) $L(P^*, f) \geq L(P, f)$

(d) None of these

(ii) समाकल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ अभिसारी है, यदि—

(a) $n > 1$

(b) $n = 1$

(c) $n < 1$

(d) इनमें कोई नहीं

The integral $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ is convergent, if :

(a) $n > 1$

(b) $n = 1$

(c) $n < 1$

(d) None of these

(iii) दूरीक समष्टि में प्रत्येक परिमित विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ होता है—

(a) संवृत समुच्चय

(b) रिक्त समुच्चय

(c) विवृत समुच्चय

(d) इनमें से कोई नहीं

In a metric space every finite intersection of open sets is always :

(a) Closed set

(b) Null set

(c) Open set

(d) None of these

(iv) यदि $f(z) = z^n$, ($n > 1$) तब $f'(z)$ का मान है—

(a) $n z^{n-1}$

(b) $n z^{n-2}$

(c) $n^2 z^{n-2}$

(d) इनमें से कोई नहीं

If $f(z) = z^n$, ($n > 1$) then the value of $f'(z)$ is :

- (a) $n z^{n-1}$
 (b) $n z^{n-2}$
 (c) $n^2 z^{n-2}$
 (d) None of these
- (v) फलन $f(z) = \frac{1}{z-1}$ की विलक्षणता (सिग्लुलरिटीज) है—

- (a) $z = 1$
 (b) $z \neq 1$
 (c) $z = 0$
 (d) इनमें से कोई नहीं

The function $f(z) = \frac{1}{z-1}$ has a singularity at :

- (a) $z = 1$
 (b) $z \neq 1$
 (c) $z = 0$
 (d) None of these

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×2=10

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है।

Note: Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory.

इकाई-1

Unit-I

2. माना $f \in R, [a, b]$ तब $|f| \in R [a, b]$ तथा

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

Let $f \in R, [a, b]$ then $|f| \in R [a, b]$ and

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(0, 0)$ पर

अवकलनीय नहीं है, किन्तु $\frac{\partial f}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}$ दोनों $(0, 0)$ पर

विद्यमान है।

Prove that $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ is not differentiable at

$(0, 0)$ but that $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ both exist at $(0, 0)$.

इकाई-II

Unit-II

3. दर्शाइए कि $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ अभिसारी है।

Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ is convergent.

अथवा

Or

$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$, $(\beta > \alpha)$ की अभिसारिता का परीक्षण

कीजिए।

Test the convergence of the integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, (\beta > \alpha).$$

इकाई-III

Unit-III

4. माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है। दर्शाइए कि फलन $d^* : X \times X \rightarrow R$ इस प्रकार है कि

$d^*(x, y) = \min. \{ 1, d(x, y) \}$, X पर एक परिबद्ध दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space. Show that the function

$d^* : X \times X \rightarrow R$, defined by

$$d^*(x, y) = \min. \{ 1, d(x, y) \}$$

is a bounded metric on X .

अथवा

Or

किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

In a metric space, every open sphere is an open set.

इकाई-IV

Unit-IV

5. दर्शाइए कि फलन $f(z) = \bar{z}$ बिन्दु $z=0$ पर संतत है, किन्तु अवकलनीय नहीं।

Show that the function $f(z) = \bar{z}$ is continuum but is not differentiable at $z=0$.

अथवा

Or

एक विश्लेषिक फलन के वास्तविक एवं अधिकल्पित भाग लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

Real and Imaginary parts of an analytic function satisfy Laplace's equation.

इकाई-V

Unit-V

6. टेलर श्रेणी से $z=0$ के सापेक्ष $\sin z$ का प्रसार कीजिए।

Expand the function $\sin z$ in a Taylor's series about $z=0$.

अथवा

Or

7. $\frac{z^2}{z^2+a^2}$ का $z=ia$ पर अवशेष (रेसीड्यू) ज्ञात कीजिए।

Find the residue of $\frac{z^2}{z^2+a^2}$ at $z=ia$.

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है।

Note: Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory.

इकाई-I

Unit-I

7. माना $f \in R[a, b]$ तथा माना $F[a, b]$ पर एक

अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

तब

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Let $f \in R [a, b]$ and let F be a differentiable function on $[a, b]$ such that

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Then

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

अथवा

Or

स्वार्ज प्रमेय को परिभाषित कर उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove that Schwarz's theorem.

इकाई-II

Unit-II

BR-838

PTO

8. प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx, \alpha > 0$$

का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx, \alpha > 0$$

With the help of differentiation with respect to parameter.

अथवा

Or

फलन $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ की फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। अतः निगमन कीजिए कि—

$$\frac{\pi^2}{1^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Find the fourier series of the function

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

Hence deduce that

$$\frac{\pi^2}{1^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

BR-838

[13]

इकाई-III

Unit-III

9. किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है, किन्तु विलोम सत्य नहीं है।

Every convergent reference in a metric space is a Cauchy sequence but converse is not true.

अथवा

Or

प्रत्येक गणनीय सघन दूरीक समष्टि द्वितीय गणनीय होता है।

Every separable metric space is second countable.

इकाई-IV

Unit-IV

10. विश्लेषिक फलन के लिए कौशी-रीमान समीकरण प्राप्त कीजिए।

Obtain Cauchy-Riemann equation for analytic function.

अथवा

Or

कौशी समाकल सूत्र को परिभाषित कर उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove that Cauchy integral formula.

BR-838

<https://www.ujjainstudy.com>

PTO

[14]

इकाई-V

Unit-V

11. विश्लेषिक फलन के लिए टेलर प्रमेय को परिभाषित कर उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove that Taylor's theorem for analytic function.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि—

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0$$

Prove that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0$$

5,300]

BR-838

<https://www.ujjainstudy.com>