

CR-1058

B. Sc. (Third Year) Examination, 2023

MATHEMATICS

Paper : Second

(Real & Complex Analysis)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : इस खण्ड में वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं। सभी प्रश्न हल करें।

CR-1058

PTO

[2]

Note: This section contains objective type questions.
Attempt all questions.

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) यदि $f \in R [a, b]$ तब—

(a) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$

(b) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(c) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \geq \int_a^b |f(x)| dx$

(d) इनमें से कोई नहीं

If $f \in R [a, b]$ then :

(a) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$

(b) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(c) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \geq \int_a^b |f(x)| dx$

(d) None of these

(ii) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ अभिसारी है, यदि—

(a) $n = 1$

(b) $n < 1$

(c) $n > 1$

(d) इनमें कोई नहीं

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ is convergent, if :

(a) $n = 1$

(b) $n < 1$

(c) $n > 1$

(d) None of these

(iii) कौन-सी संख्या परिमेय नहीं है ?

(a) 2

(b) $\frac{3}{5}$

(c) $\frac{2}{7}$

(d) $\sqrt{3}$

Which is not a rational number?

(a) 2

(b) $\frac{3}{5}$

(c) $\frac{2}{7}$

(d) $\sqrt{3}$

(iv) कौशी रीमान समीकरण में $\frac{\partial u}{\partial x} =$

(a) $\frac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\frac{-\partial v}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial v}{\partial y}$

(d) इनमें से कोई नहीं

In Cauchy Riemann equation $\frac{\partial u}{\partial x} =$

(a) $\frac{\partial v}{\partial x}$

(b) $\frac{-\partial v}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial v}{\partial y}$

(d) None of these

(v) $f(z) = \frac{z+1}{4z-z^2}$ के विलक्षण बिन्दु हैं—

(a) 4, 0

(b) -4, 0

(c) -1, 4

(d) -1, 0

Singular points of $f(z) = \frac{z+1}{4z-z^2}$ are :

(a) 4, 0

(b) -4, 0

(c) -1, 4

(d) -1, 0

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×2=10

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

Note: Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 2 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. माना $f: [a, b] \rightarrow R$ एक परिवर्द्ध फलन है। यदि p , $[a, b]$ का विभाजन हो, तब सिद्ध कीजिए कि

$$L[f, p] \leq U[f, p]$$

Let $f: [a, b] \rightarrow R$ be a bounded function. If p is a partition of $[a, b]$ then prove that

$$L[f, p] \leq U[f, p]$$

अथवा

Or

यदि $f: [a, b] \rightarrow R$ एकदिष्ट वर्धमान फलन है, तब सिद्ध कीजिए कि

$$f \in R[a, b]$$

If $f: [a, b] \rightarrow R$ is monotonic increasing function, then prove that

$$f \in R[a, b].$$

इकाई-II

Unit-II

3. सिद्ध कीजिए कि $\int_a^\infty e^{-x} \frac{\cos x}{x^2} dx$ अभिसारी ($a > 0$) है।

Prove that $\int_a^\infty e^{-x} \frac{\cos x}{x^2} dx$ is convergent ($a > 0$).

अथवा

Or

अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

Test the convergence of

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}.$$

इकाई-III

Unit-III

4. माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तब सिद्ध कीजिए कि

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

X पर दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space, then prove that

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

is a metric on X .

सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कौशी होता है।

Prove that in a metric space every convergent sequence is a Cauchy sequence. <https://www.ujjainstudy.com>

इकाई-IV

Unit-IV

5. सिद्ध कीजिए कि $e^x (\cos y + i \sin y)$ विश्लेषिक फलन है और इसका अवकलज ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $e^x (\cos y + i \sin y)$ is analytic function and find its derivative.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि $u = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$ प्रसंवेदी फलन है और इसका प्रसंवेदी संयुग्मी v ज्ञात कीजिए।

Prove that $u = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$ is harmonic function and find its harmonic conjugate.

6. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$ का प्रसार $1 < |z| < 2$ में कीजिए।

Expand $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$ in $1 < |z| < 2$.

अथवा

Or

$f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z}$ के अवशेष (रेसीड्यू) ज्ञात कीजिए।

Find the residue of $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z}$.

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note: Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I

Unit-I

7. कलन का प्रथम मूल प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove first fundamental theorem of calculus.

अथवा

Or

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0, 0) पर f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} और f_{xy} ज्ञात कीजिए।

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Find f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} and f_{xy} at (0, 0)

इकाई-II

Unit-II

8. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x} dx = \log(1+a) \quad (a > -1)$$

Prove that

$$\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x} dx = \log(1+a) \quad (a > -1)$$

अथवा

Or

फलन $f(x) = x + x^2$, $-\pi < x < \pi$ की फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the fourier series of the function

$$f(x) = x + x^2, -\pi < x < \pi$$

इकाई-III

Unit-III

9. सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में विवृत्त समुच्चयों के स्वेच्छ संग्रह का संघ पुनः विवृत्त समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space union of an arbitrary collection of open sets is again an open set.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि दो संतत फलनों का संयोजन एक संतत फलन होता है।

Prove that composition of two continuous functions is again a continuous function.

इकाई-IV

Unit-IV

10. यदि $u - v = e^x (\cos y - \sin y)$ तब विश्लेषिक फलन

$f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए।

If $u - v = e^x (\cos y - \sin y)$ then find analytic function

$$f(z) = u + iv.$$

अथवा

Or

कौशी समाकल सूत्र लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove that Cauchy Integral Formula.

इकाई-V

Unit-V

11. टेलर प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Taylor's theorem.

अथवा

Or

कन्दूर समाकलन से सिद्ध कीजिए कि—

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

By using Contour integration, prove that

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

<https://www.ujjainstudy.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से