

ZR-354

B. Sc. (Second Semester) Examination,
April-May 2017

MATHEMATICS

(Advance Calculus, Differential Equations
and Vector Calculus)

Time Allowed : Three hours

a2zSubjects.com

Maximum Marks : 125

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन
खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections as directed.
Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-अ

Section-A

a2zSubjects.com

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न) 5×3=15

(Very Short Answer Type Questions)

नोट : निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों
का है।

ZR-354

PTO

Note : Answer all the following questions. Each
question carries 3 marks.

1. (i) यदि $y = e^{ax} \sin bx$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$$

a2zSubjects.com

If $y = e^{ax} \sin bx$, then prove that :

$$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$$

(ii) मूल्यांकन कीजिए—

$$\int_0^1 \int_0^{2x} (x^2 + y^2) dx dy$$

Evaluate : a2zSubjects.com

$$\int_0^1 \int_0^{2x} (x^2 + y^2) dx dy$$

(iii) हल कीजिए—

$$(y - Px)(P - 1) = P$$

a2zSubjects.com

ZR-354

Solve :

$$(y - Px)(P - 1) = P$$

(iv) हल कीजिए—

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

a2zSubjects.com

Solve :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

(v) यदि $r = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + t \hat{k}$ तो

$$\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \left| \frac{d^2r}{dt^2} \right| \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

If $r = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + t \hat{k}$ then find out

$$\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}, \left| \frac{d^2r}{dt^2} \right| \text{ a2zSubjects.com}$$

Section-B

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×8=40

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

a2zSubjects.com

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 8 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. वक्र $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ के नति-परिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिए।

Find the point of inflexion on the curve

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

अथवा

Or

a2zSubjects.com

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिंदु

$(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $3a \sin \theta \cos \theta$ है।

Prove that the radius of curvature at the point

$(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is

$3a \sin \theta \cos \theta$.

a2zSubjects.com

इकाई-II

Unit-II

3. फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x-2)$ और $(y-3)$ के घातों में टेलर प्रसार कीजिए।

Expand $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ in powers of $(x-2)$ & $(y-3)$.

अथवा

Or

एक संख्या C इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि फलन

a2zSubjects.com

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ C & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिंदु पर संतत है।

Find a number C such that the function

a2zSubjects.com

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ C & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is continuous at the origin.

इकाई-III

Unit-III

4. समीकरण $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ को हल कीजिए।

Solve

a2zSubjects.com

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

अथवा

Or

हल कीजिये—

$$x = y + a \log p$$

Solve :

$$x = y + a \log p$$

a2zSubjects.com

इकाई-IV

Unit-IV

5. हल कीजिए—

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$$

Solve :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$$

अथवा

Or

or

a2zSubjects.com

स्वतंत्र चर को परिभाषित करके निम्नांकित अवकल समीकरण को हल कीजिए—

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^4} y = 0$$

Solve the following differential equation by changing the independent variable :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^4} y = 0$$

a2zSubjects.com

इकाई-V

Unit-V

6. यदि $f = xy^2 \hat{i} + 2x^2 yz \hat{j} - 3yz^2 \hat{k}$ तो बिंदु $(1, -1, 1)$ पर ज्ञात कीजिए।

(i) $\text{div } f$ (ii) $\text{curl } f$

If $f = xy^2 \hat{i} + 2x^2 yz \hat{j} - 3yz^2 \hat{k}$, then find :

(i) $\text{div } f$

a2zSubjects.com

(ii) $\text{curl } f$

a the point $(1, -1, 1)$.

यदि—

$$\vec{a} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{c} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$$

तो दर्शाइए कि

$$\int_1^2 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) dt = \frac{-87}{2} \hat{i} - \frac{44}{3} \hat{j} + \frac{15}{2} \hat{k}$$

If

a2zSubjects.com

$$\vec{a} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{c} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$$

then show that

a2zSubjects.com

$$\int_1^2 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) dt = \frac{-87}{2} \hat{i} - \frac{44}{3} \hat{j} + \frac{15}{2} \hat{k}$$

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×14=70

(Long Answer Type Questions)

a2zSubjects.com

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है।

Note : Attempt all five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 14 marks.

a2zSubjects.com

इकाई-I

Unit-I

7. मैक्लॉरिन प्रमेय से $\tan^{-1}x$ का x की बढ़ती घातों में प्रसार कीजिए।
Expand $\tan^{-1}x$ in ascending powers of x by Maclaurin's theorem.

अथवा

Or

वक्र $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$ की अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

a2zSubjects.com

Find the asymptotes of the curve

$$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$$

इकाई-II

Unit-II

a2zSubjects.com

8. यदि $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$, $u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$

तो सिद्ध कीजिए कि—

$$J(u_1, u_2, u_3) = 4$$

If $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$, $u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$

then prove that :

$$J(u_1, u_2, u_3) = 4$$

अथवा

a2zSubjects.com

Or

यदि

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \right)^{1/2}$$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{144} (13 + \tan^2 u)$$

If

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \right)^{1/2}$$

a2zSubjects.com

prove that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{144} (13 + \tan^2 u)$$

इकाई-III

Unit-III

9. हल कीजिए—

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$$

Solve :

a2zSubjects.com

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$$

हल कीजिये—

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

Solve :

a2zSubjects.com

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

इकाई-IV

Unit-IV

10. प्राचल विचरण से हल कीजिये—

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

Solve by variation of parameters :

a2zSubjects.com

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{cosec} x$$

हल कीजिए—

$$\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0$$

a2zSubjects.com

Solve the simultaneous equations :

$$\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0$$

इकाई-V

Unit-V

a2zSubjects.com

11. स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जब

$$\vec{F} = x^2 \hat{i} + xy \hat{j}$$

a2zSubjects.com

जहाँ C , xy समतल में वर्ग की परिमाण है, जिसकी भुजाएँ रेखाओं

$x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = a$ के अनुदिश हैं।

Verify stoke's theorem for the function

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$$

integrated round the square in xy -plane whose sides are along the lines

$$x = 0, y = 0, x = a, y = a \quad \text{a2zSubjects.com}$$

अथवा

Or

$\oint_C [(xy + y^2)dx + x^2 dy]$ के लिये समतल में ग्रीन प्रमेय

सत्यापित कीजिए, जहाँ C , $y = x$ तथा $y = x^2$ द्वारा परिभाषित

क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem in plane for

$$\oint_C [(xy + y^2)dx + x^2 dy]$$

where C is the closed curve of the region bounded by

$y = x$ & $y = x^2$.

a2zSubjects.com