www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Printed Pages– 16

XR-304

B. Sc. (Second Semester) Examination, June 2016

MATHEMATICS

(Advance Calculus, Differential Equations and Vector Calculus)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 125

नोट : *सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।*

***Note :** Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.*

खण्ड-अ

Section-A

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न) **5×3=15**

(Very Short Answer Type Questions)

नोट : *निम्नलिखित सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।*

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

***Note :** Answer all the following questions. Each question carries 3 marks.*

1. (i) यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ तब सिद्ध कीजिए—

$$x^2 y_2 + x\, y_1 + y = 0$$

If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ then prove that :

$$x^2 y_2 + x\, y_1 + y = 0$$

(ii) मान ज्ञात कीजिये—

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}$$

Evaluate :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

(iii) हल कीजिए—

$$y = px + \frac{a}{p}$$

Solve :

$$y = px + \frac{a}{p}$$

(iv) हल कीजिए—

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

(v) सिद्ध कीजिए—

$$div\ \vec{r} = 3$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Prove that :

$$div\ \vec{r} = 3$$

खण्ड-ब

Section-B

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 5×8=40

(Short Answer Type Questions)

नोट : *सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।*

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 8 marks.

इकाई-I

Unit-I

2. सिद्ध कीजिए—

$$\log \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots\ldots\ldots$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Prove that :

$$\log \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots\ldots\ldots$$

अथवा

Or

यदि $x = a(t + \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ तब सिद्ध कीजिए—

$$\rho = 4\ a\cos\frac{t}{2}$$

If $x = a(t + \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ then prove that :

$$\rho = 4\ a\cos\frac{t}{2}$$

इकाई-II

Unit-II

3. मान ज्ञात कीजिये—

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z)\, dx\, dy\, dz$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Evaluate :

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z)\, dx\, dy\, dz$$

अथवा

Or

यदि $x + y + z = u,\ y + z = uv,\ z = uvw$ तब सिद्ध कीजिए—

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v$$

If $x + y + z = u,\ y + z = uv,\ z = uvw$ then prove that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v$$

इकाई-III

Unit-III

4. हल कीजिए—

$$(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Solve :

$$\left(1+y^2\right)dx = \left(\tan^{-1} y - x\right)dy$$

अथवा

Or

हल कीजिये—

$$\left(1 + 4xy + 2y^2\right)dx + \left(1 + 4xy + 2x^2\right)dy = 0$$

Solve :

$$\left(1 + 4xy + 2y^2\right)dx + \left(1 + 4xy + 2x^2\right)dy = 0$$

इकाई-IV

Unit-IV

5. हल कीजिए—

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 13y = \log x$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Solve :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 13y = \log x$$

अथवा

Or

हल कीजिये—

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}$$

Solve :

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}$$

इकाई-V

Unit-V

6. सिद्ध कीजिये—

$$\text{div}\left(\text{grad } r^m\right) = m(m+1)r^{m-2}$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

Prove that :

$$\text{div}\left(\text{grad } r^m\right) = m(m+1)r^{m-2}$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिये—

$$\text{curl}\left(\vec{r} \times \vec{a}\right) = -2\vec{a}$$

Prove that :

$$\text{curl}\left(\vec{r} \times \vec{a}\right) = -2\vec{a}$$

खण्ड-स

Section-C

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) 5×14=70

(Long Answer Type Questions)

*नोट : सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न हल करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है।*

***Note :** Attempt all **five** questions. **One** question from*

each unit is compulsory. Each question carries 14 marks.

इकाई-I

Unit-I

7. यदि $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ तब सिद्ध कीजिए कि—

$$\left(x^2-1\right)y_{n+2} + (2n+1)x\,y_{n+1} + \left(n^2-m^2\right)y_n = 0$$

If $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ then prove that :

$$\left(x^2-1\right)y_{n+2} + (2n+1)x\,y_{n+1} + \left(n^2-m^2\right)y_n = 0$$

अथवा

Or

अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए—

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

Find the asymptotes :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

इकाई-II

Unit-II

8. यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ तब सिद्ध कीजिए कि—

(i) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

(ii) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y} =$

$$\left(1-4\sin^2 u\right)\sin 2u$$

If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ then prove that :

(i) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

(ii) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y} =$

$$\left(1-4\sin^2 u\right)\sin 2u$$

अथवा

Or

यदि

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

तब सिद्ध कीजिए कि $f(x, y), (0, 0)$ पर संतत तो है किन्तु अवलनीय नहीं है।

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

If

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

then prove that $f(x, y)$ is continuous but not differentiable at (0, 0).

इकाई-III

Unit-III

9. हल कीजिए—

$$p^2 + 2py\cot x - y^2 = 0$$

Solve :

$$p^2 + 2py\cot x - y^2 = 0$$

अथवा

Or

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

हल कीजिये—

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$$

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$$

इकाई-IV

Unit-IV

10. प्राचल विचरण से हल कीजिये—

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$$

Solve by the method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$$

अथवा

Or

www.a2zSubjects.com www.a2zSubjects.com

www.a2zSubjects.com

www.a2zSubjects.com

हल कीजिए—

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

Solve :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

इकाई-V

Unit-V

11. $\vec{F} = 4xzi - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ के लिये गॉस डाइवर्जेन्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए, पृष्ठ S समतलों $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$ से परिबद्ध है।

Verify Gauss's divergence theorem for $\vec{F} = 4xzi - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$, S is the surface bounded by the planes $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$.

अथवा

Or

www.a2zSubjects.com

www.a2zSubjects.com

$\vec{F} = (x^2+y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ के लिये स्टोक प्रमेय का सत्यापन कीजिये, जबकि समाकल $x = \pm a$, $y = a$, $y = b$ से बने आयत के परित: लिया गया है।

Verify Stoke's theorem for

$$\vec{F} = (x^2+y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$$

where the integral is taken round the rectangle bounded by

$$x = \pm a, \quad y = a, \quad y = b.$$