Printed Pages – 16

SCR-5309

B. Sc. (First Year) Suppl. Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper : Third

(Vector Analysis & Geometry)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : *सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।*

Note : *Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.*

खण्ड–'अ'

Section–'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न) 5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : *सभी प्रश्न हल करें। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।*

Note : *Attempt all questions. Each question carries 1 mark.*

 PTO

1. सही उत्तर का चयन कीजिए–

Choose the correct answer :

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})$ का मान है।

(a) $\vec{0}$

(b) $3[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

(c) $3\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

(d) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

The value of $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})$:

(a) $\vec{0}$

(b) $3[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

(c) $3\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

(d) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

(ii) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तब $\int_0^1 \vec{a} \cdot \vec{b}\, dt$ का मान है

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 0

If $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ then the value of $\int_0^1 \vec{a} \cdot \vec{b}\, dt$ is :

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 0

(iii) रेखीय समाकलन एवं पृष्ठीय समाकलन के सम्बन्ध को कहते है—

(a) गॉस प्रमेय

(b) स्टॉक्स प्रमेय

(c) ग्रीन्स प्रमेय

(d) बरनौली प्रमेय

A relation between the line integral and the surface integral is :

(a) Gauss's theorem

(b) Stoke's theorem

(c) Green's theorem

(d) Bernoulli's theorem

(iv) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ एक दीर्घवृत्त को निरूपित करेगा यदि—

(a) $h < ab$

(b) $h > ab$

(c) $h^2 > ab$

(d) $h^2 < ab$

The equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents an ellipse if :

(a) $h < ab$

(b) $h > ab$

(c) $h^2 > ab$

(d) $h^2 < ab$

(v) बिन्दु (1, 2, 3) पर शांक्वज $3x^2 - 4y + 5z^2 = 32$ के स्पर्श तल का समीकरण है—

(a) $3x^2 - 8y + 15z = 32$

(b) $3x^2 + 8y + 15z = -32$

(c) $3x^2 - 8y - 15z = 32$

(d) $-3x^2 - 8y - 15z = 32$

Equation of tangent plane of conicoids $3x^2 - 4y + 5z^2 = 32$ at the point (1, 2, 3) is :

(a) $3x^2 - 8y + 15z = 32$

(b) $3x^2 + 8y + 15z = -32$

(c) $3x^2 - 8y - 15z = 32$

(d) $-3x^2 - 8y - 15z = 32$

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न) 5×2=10

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

Note : *Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 2 marks.*

इकाई-I

Unit-I

2. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई तीन सदिश है तब सिद्ध कीजिए कि

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ be any three vectors then prove that

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

अथवा

Or

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तब सिद्ध कीजिए कि div $\vec{r} = 3$ तब curl $\vec{r} = \vec{0}$.

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ then prove that div $\vec{r} = 3$ and curl $\vec{r} = \vec{0}$.

इकाई-II

Unit-II

3. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ $\vec{F} = x^2y^2\hat{i} + y\hat{j}$ एवं वक्र C, $y^2 = 4x$, xy तल में (0, 0) से (4, 4) तक है।

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = x^2y^2\hat{i} + y\hat{j}$ and curve C is $y^2 = 4x$ in the xy plane from (0, 0) to (4, 4).

अथवा

Or

यदि $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

If $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ then prove that

$$\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt = -14\hat{i} + 75\hat{j} - 15\hat{k}$$

इकाई-III

Unit-III

4. दर्शाओ कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ एवं $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

Show that the equations $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ and $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ represent the same conic.

अथवा

Or

शांकवो के समीकरण ज्ञात कीजिए जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से संनाभि है।

To find the equation of conics which are confocal with the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

इकाई-IV

Unit-IV

5. उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (5, 4, 3) तथा आधार वक्र, $3x^2+2y^2=6, y+z=0$ है।

Find the equation of cone whose vertex (5, 4, 3) and guiding curve $3x^2+2y^2=6, y+z=0$.

अथवा

Or

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वक्र $x^2+y^2+z^2=9, x-y+z=3$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose guiding circle is $x^2+y^2+z^2=9, x-y+z=3$.

इकाई-V

Unit-V

6. सिद्ध कीजिए कि समतल $x+2y-2z=4$ परवलयज $3x^2+4y^2=24z$ को स्पर्श करता है एवं स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

Prove that the plane $x+2y-2z=4$ touches the paraboloid $3x^2+4y^2=24z$ and also find the co-ordinate of point of contact.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि समतल $lx+my+nz=0$ से शांक्वज $ax^2+by^2=cz^2=1$ के परिच्छेद के अक्ष शंकु $(b-c)\frac{l}{x}+(c-a)\frac{m}{y}+(a-b)\frac{n}{z}=0$ पर पड़ेंगे।

Prove that the axes of the section of the conicoid $ax^2+by^2=cz^2=1$ by the plane $lx+my+nz=0$ lie on the cone $(b-c)\frac{l}{x}+(c-a)\frac{m}{y}+(a-b)\frac{n}{z}=0$.

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) **5×5=25**

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note : *Attempt all the five questions. **One** question from each unit is compulsory. Each question carries 5 marks.*

इकाई-I

Unit-I

7\. यदि $\vec{a} = \sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} + \theta\hat{k}$, $\vec{b} = \cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तब $\theta = 0$ पर $\frac{d}{d\theta}\left[\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]$ ज्ञात कीजिए।

If $\vec{a} = \sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} + \theta\hat{k}$, $\vec{b} = \cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ then find $\frac{d}{d\theta}\left[\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]$ and $\theta = 0$.

अथवा

Or

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तब सिद्ध कीजिए curl $\left(r^n\vec{r}\right) = \vec{0}$.

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ then prove that curl $\left(r^n\vec{r}\right) = \vec{0}$.

इकाई-II

Unit-II

8\. स्टॉक प्रमेय को सत्यापित कीजिए जबकि $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$ जबकि समाकल को $x = 0, x = a$, $y = 0, y = a$ से बने वर्ग के परितः लिया गया है।

Prove the Stoke's theorem when $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j}$ when integrated taken around the square $x = 0, x = a$, $y = 0, y = a$.

अथवा

Or

ग्रीन प्रमेय की सहायता से $\int_C \left(e^{-x}\sin y\,dx + e^{-x}\cos y\,dy\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। जबकि C

आयत है जिसके $(0,0), (\pi,0), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ शीर्ष हैं।

Find the value by Green's theorem

$$\int_C \left(e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy\right)$$

where C is a rectangle whose vertices are

$$(0,0), (\pi,0), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

इकाई-III

Unit-III

9. शांकव

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

को अनुरेखित कीजिए एवं नियताओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

Trace the conic

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

Also find the equation of its directrices.

अथवा

Or

यदि PSP' एवं QSQ' एक शांकव की दो परस्पर लम्बवत् नाभिगत जीवाएँ हैं, तब सिद्ध कीजिए

$$\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{अचर}$$

If PSP' and QSQ' be two perpendicular focal chords of a conic then prove that

$$\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{constant}$$

इकाई-IV

Unit-IV

10. उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसकी त्रिज्या 2 है तथा जिसकी अक्ष सरल रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose radius 2 and whose axis straight line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

अथवा

Or

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) तथा आधार शांकव

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$$

है।

Find the equation of cone whose vertex (α, β, γ) and base the conic

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$$

इकाई-V

Unit-V

11. अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु $(a\cos\alpha, b\sin\alpha, 0)$ से जाने वाले जनको के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation to the generators of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

which passes through the point $(a\cos\alpha, b\sin\alpha, 0)$.

अथवा

Or

शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के नियामक गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

To find the equation of director sphere of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.