

AR-4117

B. Sc. (First Year) Examination, March-April 2018

MATHEMATICS

Paper : Second

(Calculus & Differential Equations)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(Objective Type Questions) 5×1=5

नोट : इस खण्ड में वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं। सभी प्रश्न हल करें।

AR-4117

www.a2zSubjects.com

PTO

[2]

Note : This section contains objective type questions.

Attempt all questions.

1. (i) श्रेणी $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ किस फलन का प्रसार है?

- (a) $\sin x$
 (b) $\tan x$
 (c) $\sin^{-1} x$
 (d) $\tan^{-1} x$

The value of the series $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ is :

- (a) $\sin x$
 (b) $\tan x$
 (c) $\sin^{-1} x$
 (d) $\tan^{-1} x$

(ii) वक्र $xy = 4$ के लिए बिन्दु (2, 2) पर वक्रता त्रिज्या है—

- (a) $\sqrt{2}$
 (b) 2

AR-4117

www.a2zSubjects.com

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $2\sqrt{2}$

The radius of curvature at the point (2, 2) of the curve $xy = 4$ is :

(a) $\sqrt{2}$

(b) 2

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) $2\sqrt{2}$

(iii) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ का मान है ?

(a) $\tan^2 x$

(b) $\frac{1}{3} \tan^3 x$

(c) $\frac{1}{2} \tan^2 x$

(d) इनमें से कोई नहीं

The value of $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ is :

(a) $\tan^2 x$

(b) $\frac{1}{3} \tan^3 x$

(c) $\frac{1}{2} \tan^2 x$

(d) None of these

(iv) अवकल समीकरण $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$ का समाकल

गुणक है— www.a2zSubjects.com

(a) $1+x^2$

(b) $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

(c) $\log(1+x)$

(d) $2x$

Integrating factor (I.F.) of differential equation

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2 \text{ is :}$$

(a) $1+x^2$

(b) $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

(c) $\log(1+x)$

(d) $2x$

(v) अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ का

पूरक फलन है ?

(a) $(C_1 + C_2)x$

(b) $(C_1 + C_2 \log x)x$

(c) $(C_1 + C_2, x)e^x$

(d) $(C_1 + C_2)e^x$

The complementary function (C.F.) of the differential equation :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$$

(a) $(C_1 + C_2)x$

(b) $(C_1 + C_2 \log x)x$

(c) $(C_1 + C_2, x)e^x$

(d) $(C_1 + C_2)e^x$

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(Short Answer Type Questions) $5 \times 2 = 10$

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है।

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory.

इकाई-I

Unit-I

2. यदि $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

If $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, then prove that :

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

अथवा

Or

टेलर प्रमेय से $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ का $(x-2)$ की घातों में प्रसार कीजिए।

Expand $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ in powers of $(x-2)$ by Taylor's theorem.

इकाई-II

Unit-II

3. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature at the point (x, y) of the Parabola $y^2 = 4ax$.

अथवा

Or

दर्शाइए कि वक्र $x^2 + y^2 - 3axy = 0$ मूल बिन्दु पर एक नोट रखता है।

Show that the curve $x^2 + y^2 - 3axy = 0$ has a node at the origin.

इकाई-III

Unit-III

4. सिद्ध कीजिए—

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$$

अथवा

Or

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the complete area of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

इकाई-IV

Unit-IV

AR-4117

5. हल कीजिए—

$$(1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

Solve :

$$(1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$y = 2px + p^2$$

Solve :

$$y = 2px + p^2 \quad \text{www.a2zSubjects.com}$$

इकाई-V

Unit-V

6. हल कीजिए—

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 7y = e^x + e^{-x}$$

AR-4117

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 7y = e^x + e^{-x}$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x \log x$$

Solve :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x \log x$$

खण्ड-'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(Long Answer Type Questions)

5×5=25

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है।

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory.

इकाई-I

Unit-I

7. सिद्ध कीजिए कि वक्र

$$x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$$

और उसकी अनन्तस्पर्शियों के आठ प्रतिच्छेद बिन्दु एक समकोणीय अतिपरवलय पर स्थित हैं?

Show that the eight point of intersection of curve

$$x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$$

and its asymptotes lie on a rectangular hyperbola.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि वक्र $xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 225 = 0$

की चार अनन्तस्पर्शियां इसे पुनः आठ बिन्दुओं में काटती हैं। जो एक ऐसे दीर्घवृत्त पर स्थित है जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{4}{5}$ है।

Show that the eight points of intersection of the curve

$xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 225 = 0$ and its four

asymptotes lie on an ellipse whose eccentricity is $\frac{4}{5}$.

इकाई-II

Unit-II

8. वक्र $y^2(a+x) = x^2(3a-x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $y^2(a+x) = x^2(3a-x)$.

www.a2zSubjects.com

अथवा

Or

दर्शाए कि वक्र $y^2 = ax^2 + bx^3$ पर मूल बिन्दु पर नोड, एक

उभयाग्र या एक संयुग्मी बिन्दु है तदनुसार a धनात्मक शून्य या ऋणात्मक है।

Show that the origin is a node, a cusp, or a conjugate point on the curve $y^2 = ax^2 + bx^3$ according as a is positive, zero or negative.

इकाई-III

Unit-III

9. दर्शाए कि परवलय $y^2 = 4ax$ रेखा $3y = 8x$ से कटे हुए चाप की लम्बाई $a[\log 2 + (15/16)]$ है।

Show that the length of the arc of the parabola $y^2 = 4ax$ cut off by the line $3y = 8x$ is $a[\log 2 + (15/16)]$.

अथवा

Or

हृदयाभ $r = a(1 + \cos \theta)$ की सम्पूर्ण लम्बाई (परिमाप) ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाए कि उसका ऊपरी अर्द्धभाग रेखा $\theta = \pi/3$ द्वारा विभाजित है।

Find the entire length of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

Also show that the arc of the upper half is bisected by line $\theta = \pi/3$.

इकाई-IV

Unit-IV

10. निम्नलिखित अवकल समीकरण का व्यापक एवं विचित्र हल ज्ञात कीजिए।

$$y^2 - 2pxy + p^2(x^2 - 1) = m^2$$

Find the general and singular solution of the following differential equation $y^2 - 2pxy + p^2(x^2 - 1) = m^2$.

अथवा

Or

वक्रकुल $r^n = a^n \cos n\theta$ की लम्बकोणीय संछेदियाँ ज्ञात कीजिए, जहाँ a कुल का प्राचल है।

Find orthogonal trajectories of the family of curves

$$r^n = a^n \cos n\theta, a \text{ being parameter.}$$

इकाई-V

Unit-V

11. परतंत्र चर को परिवर्तित करते हुए हल कीजिए—

$$\frac{d}{dx} \left(\cos^2 x \frac{dy}{dx} \right) + y \cos^2 x = 0$$

Solve by changing dependent variable

$$\frac{d}{dx} \left(\cos^2 x \frac{dy}{dx} \right) + y \cos^2 x = 0$$

अथवा

Or

प्राचल विचरण की विधि से हल कीजिए—

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4 \tan 2x$$

Solve the method of variation of parameters

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 4 \tan 2x$$