

YR-314

B. Sc. (First Semester) Examination, Nov.-Dec. 2016

MATHEMATICS

(Matrix Theory, Calculus & Geometry)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 125

नोट : सभी तीनों खण्डों के प्रश्न निर्देशानुसार करें। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note : Attempt questions of all three sections as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-'अ'

Section-'A'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×3=15

(Very Short Answer Type Questions)

नोट : इस खण्ड में अति लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। सभी प्रश्न हल करें। प्रत्येक प्रश्न 03 अंकों का है। (अधिकतम 20 शब्द)

[2]

Note : This section contains very short answer type questions. Attempt all questions. Each question carries 03 marks. (Maximum 20 words)

1. (i) आव्यूह के आइगेन मान और आइगेन सदिश की परिभाषा दीजिए।

Give the definition of Eigen values and Eigen vectors of a matrix.

(ii) यदि समीकरण $(x^n - 1) = 0$ के मूल $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \dots = n.$$

If $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ are the roots of the equation

$$(x^n - 1) = 0 \text{ then prove that}$$

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \dots = n.$$

(iii) निम्नलिखित फलन के सांतत्य की जाँच $x = 0$ पर कीजिए

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

[3]

Test the continuity of function define as follows at

$$x = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$$

(v) लम्ब वृत्तीय शंकु की परिभाषा दीजिए।

Give the definition of right circular cone.

खण्ड-'ब'

Section-'B'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×8=40

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है।

[4]

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 8 marks.

इकाई-1

Unit-1

आव्यूह A की जाति ज्ञात कीजिए जहाँ—

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Find the rank of matrix A, where

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

अथवा

Or

आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

के आइगेन मानों एवं संगत आइगेन सदिश को ज्ञात कीजिए।

Determine the eigen value and the corresponding vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई-II

Unit-II

3. यदि समीकरण $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ के मूल समान्तर श्रेणी में हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$2p^3 - 3pq + r = 0$$

If the roots of the equation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ are in arithmetic progression, then prove that

$$2p^3 - 3pq + r = 0.$$

अथवा

Or

यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha$ सिद्ध कीजिए कि—

$$\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$$

$$\text{If } \sin(\theta + i\phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha.$$

Prove that

$$\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3.$$

इकाई-III

Unit-III

4. निम्न फलन का $x = 0$ पर सांतत्यता के लिए परीक्षण कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Test the continuity of function at $x = 0$ which defined as follows :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

अथवा

Or

[7]

दर्शाइए कि फलन $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$

अन्तराल $[0, 1]$ पर एक समान सतत है।

Show that $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ is uniformly continuous on $[0, 1]$.

इकाई-IV

Unit-IV

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}$$

अथवा

Or

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

का मान ज्ञात कीजिए।

YR-314

PTO

[8]

Find the value of

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

इकाई-V

Unit-V

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(1, 2, 3)$ और आधार वक्र वृत्त $y^2 = 4ax$, $z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is $(1, 2, 3)$

and base curve is $y^2 = 4ax$, $z = 0$.

अथवा

Or

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके जनक रेखा

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$$

के समान्तर है तथा आधार वक्र $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 0$ है।

Find the equation of the cylinder, whose generators are

parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and the base curve

is $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 0$.

YR-314

खण्ड 'स'

Section-'C'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

 $\frac{5 \times 14 = 70}{1}$

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है।

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. Each question carries 14 marks.

इकाई-I

Unit-I

$$7. \text{ } A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

कैले-हैमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करते हैं। अतः A^{-1} ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Satisfies Cayley-Hamilton theorem hence find A^{-1} .

अथवा

Or

आव्यूह विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = -18$$

Solve the following equations by Matrix method :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 = -18$$

इकाई-II

Unit-II

8. यदि n कोई धन पूर्णांक है तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\left(\frac{1 + \sin \phi + i \cos \phi}{1 + \sin \phi - i \cos \phi} \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{2} - n\phi \right)$$

| 11 |

$$+ i \sin \left(\frac{n\pi}{2} - n\phi \right)$$

In n is a positive integer, then prove that

$$\left(\frac{1 + \sin \phi + i \cos \phi}{1 + \sin \phi - i \cos \phi} \right)^n = \cos \left(\frac{n\pi}{2} - n\phi \right)$$

$$+ i \sin \left(\frac{n\pi}{2} - n\phi \right)$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि—

$$2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right] = \cos^{-1} \left[\frac{b+a \cos x}{a+b \cos x} \right]$$

To prove that :

$$2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right] = \cos^{-1} \left[\frac{b+a \cos x}{a+b \cos x} \right]$$

इकाई-III

Unit-III

9. दर्शाइए कि फलन

YR-314

PTO

| 12 |

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ पर सतत व अवकलनीय है।

Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

is continuous and differentiable at $x=0$

अथवा

Or

लांग्राज के प्रथम माध्यमान प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the first mean value theorem of Lagrange.

इकाई-IV

Unit-IV

10. दर्शाइए कि—

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2 \sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}$$

YR-314

| 13 |

To show that :

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2 \sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4}$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि—

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$$

To prove that :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta = \frac{\pi}{8} \log 2$$

इकाई-V

Unit-V

11. इस लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (1, -2, -1) है जिसका अर्द्ध शीर्ष कोण, 60° है तथा अक्ष

$$\frac{1}{3}(x-1) = \frac{-1}{4}(y+2) = \frac{1}{5}(z+1) \text{ है।}$$

Find the equation of the right circular cone with vertex at (1, -2, -1) semi-vertical angle 60° and the axis

$$\frac{1}{3}(x-1) = \frac{-1}{4}(y+2) = \frac{1}{5}(z+1)$$

| 14 |

अथवा

Or

उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2, जिसका अक्ष (1, 2, 3) होकर जाता है तथा उसकी दिक् कोज्याएँ 2, -3, 6 के समानुपाती हैं।

Find the equation of right circular cone whose radius is 2, axis passes through (1, 2, 3) and its direction-cosines are proportional to 2, -3, 6.